Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

CMR/RP/ARP/HT 45 minutos
4/4/2024

Pauta Test 2

Cálculo III - 521227 (2024-1)

Pregunta 1: Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y + 6y^3}{x^2 + 2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determine el conjunto de puntos en que f es continua.

b) Calcule las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

c) Calcule todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

d) Determine si f es diferenciable en todo su dominio.

Solución:
a) **(15 pts)** Para $(x,y) \neq (0,0)$, f es continua en (x,y) por álgebra de funciones continuas, ya que $x^2 + 2y^2 \neq 0$. Por otro lado, tenemos

$$\left|\frac{4x^2y + 6y^3}{x^2 + 2y^2}\right| = \frac{|4x^2y + 6y^3|}{x^2 + 2y^2} \leq \frac{|4x^2y| + |6y^3|}{x^2 + 2y^2} = \frac{4x^2|y|}{x^2 + 2y^2} + \frac{6|y|^3}{x^2 + 2y^2}$$
$$\leq \frac{4x^2|y|}{x^2} + \frac{6|y|^3}{2y^2} = 4|y| + 3|y| = 7|y| \to 0$$

Por el teorema de acotamiento, esto implica que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, y por lo tanto f también es continua en $(0,0)$. Por lo tanto, f es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) **(10 pts)** Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h-0}{h} = 3.$$

c) **(15 pts)** Sea $\vec{v} = (a,b) \neq (0,0)$. Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{4h^2a^2hb + 6h^3b^3}{h^2a^2 + 2h^2b^2}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3\left(a^2b + 6b^3\right)}{h^3\left(h^2 + 2b^2\right)} = \frac{4a^2b + 6b^3}{a^2 + 2b^2}.$$

Observamos que $a^2 + 2b^2 \neq 0$ ya que $(a,b) \neq (0,0)$.

d) **(20 pts)** Si f es diferenciable en $(0,0)$, entonces para cualquier $\vec{v} = (a,b) \neq (0,0)$ tenemos, usando la parte *b*),

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = (0,3) \cdot (a,b) = 3b.$$

Usando el valor de $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ obtenido en la parte *c*), tenemos

$$\frac{4a^2b + 6b^3}{a^2 + 2b^2} = 3b \iff 4a^3b + 6b^3 = 3a^2b + 6b^3 \iff a^2b = 0 \iff a = 0 \quad \vee \quad b = 0.$$

Esto implica que para cualquier $\vec{v} = (a,b)$ con a y b *ambos* distintos de cero no se satisface la igualdad $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$. Por lo tanto f no es diferenciable en $(0,0)$, y en consecuencia no es diferenciable en todo su dominio.